Teoretická část - 8.7.2021

1. (a) Definujte parciální derivace (včetně derivací vyšších řádů) a totální diferenciál (2 body).
   (b) Zformulujte větu o derivaci složeného zobrazení (1 bod).
   (c) Dokažte větu o derivaci složeného zobrazení (4 body).
   (d) Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(3,5) = (1,1)$, $J_F(3,5) = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1,1) = (-3,2)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ a $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Jak vypadá $\nabla(g \circ F)(3,5)$ (pokud existuje)? (1 bod).

2. (a) Definujte fundamentální systém a Wronského determinant (2 body).

   (b) Zformulujte větu o prostoru řešení homogenní lineární rovnice a větu o variaci konstant ($2,5$ bodu).

   (c) Větu o prostoru řešení homogenní lineární rovnice dokažte ($1,5$ bodu).

   (d) Nechť je $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že množina funkcí

$$\{1+n, x+n, x^2+n, \ldots, x^{n-1}+n\}$$

   je fundamentálním systémem rovnice $y^{(n)} = 0$ (2 body).

3. (a) Definujte metrický prostor, úplný metrický prostor a kontraktivní zobrazení (3 body).

   (b) Zformulujte Banachovu větu o kontrakci (1 bod).

   (c) Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ jako metrický prostor s obvyklou Eukleidovskou metrikou. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kontrakce, potom $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)$ je kontrakce na $\mathbb{R}^2$,

      ii. nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kontrakce, potom $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $\psi(x) = 2\varphi(x)$ je kontrakce na $\mathbb{R}^2$,

      iii. nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kontrakce, potom $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $\psi(x) = \varphi(2x)$ je kontrakce na $\mathbb{R}^2$,

      iv. nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kontrakce, potom $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $\psi(x) = \varphi(\varphi(x))$ je kontrakce na $\mathbb{R}^2$

      (2 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. nechť (M, ρ) a (X, d) jsou metrické prostory, potom zobrazení $\phi : (M \times X) \times (M \times X) \to \mathbb{R}$ definované jako $\phi((a, x), (b, y)) = \max(\rho(a, b), d(x, y))$ je metrikou na množině $M \times X$.

      ii. nechť (M, ρ) a (X, d) jsou metrické prostory, potom zobrazení $\phi : (M \times X) \times (M \times X) \to \mathbb{R}$ definované jako $\phi((a, x), (b, y)) = \min(\rho(a, b), d(x, y))$ je metrikou na množině $M \times X$

      (2 body).